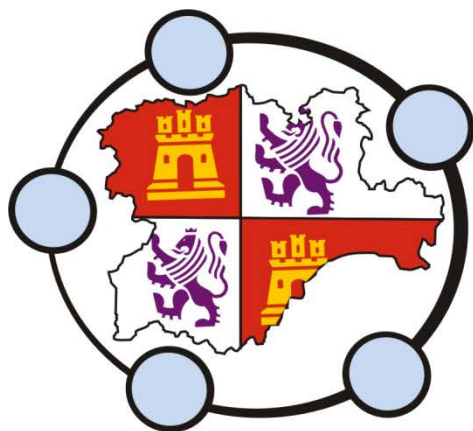


GeoGebra CAS

Cálculo simbólico.



I JORNADA GEOGEBRA CASTILLA Y LEÓN

SORIA, 5 de Abril de 2014



Instituto
Geogebra
Cantabria



Junta de
Castilla y León



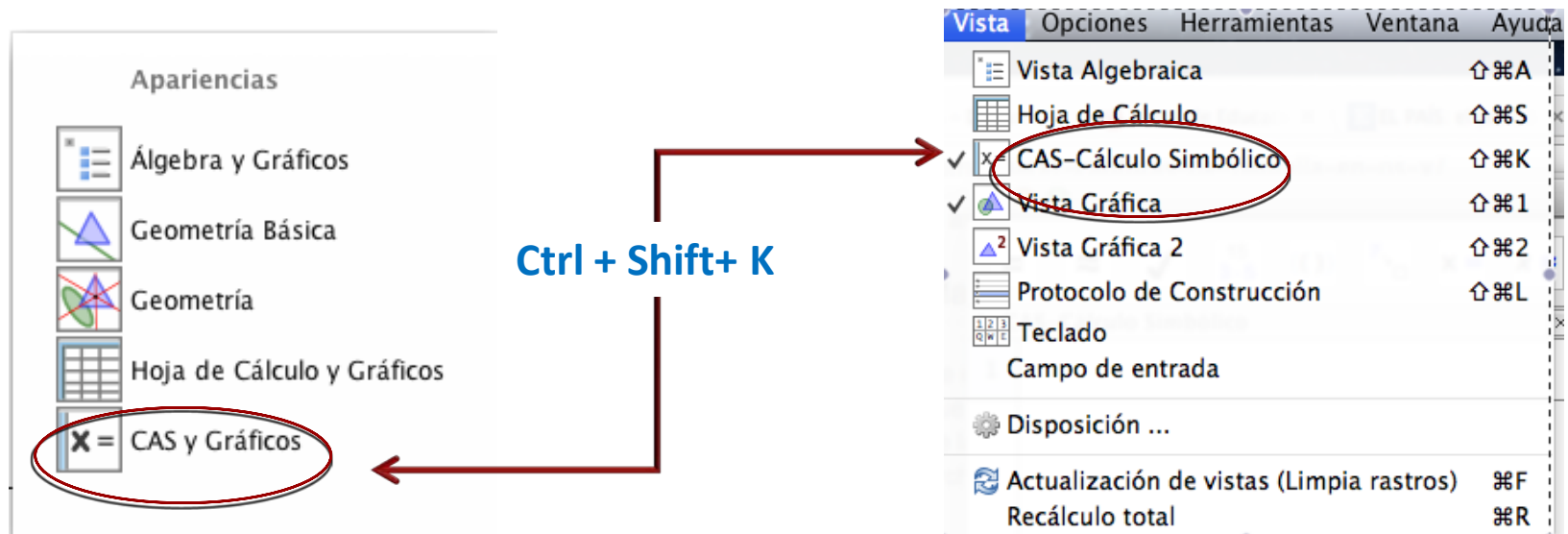
Asociación
Castellana y Leonesa de
Educación Matemática
Miguel de Guzmán

Jose M. Arranz San José
Asociación Castellana y Leonesa de
Educación Matemática "Miguel de Guzmán".



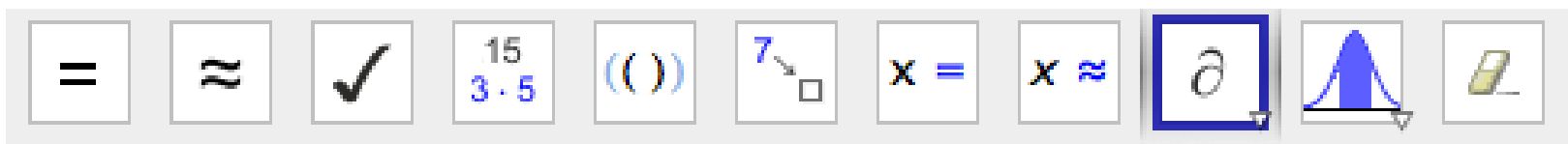
GeoGebra CAS

- Disponible desde la versión 4.2.
- Algunos cambios en versión actual 4.4.
- Se accede seleccionando vista CAS:





Vista CAS: Barra de herramientas propia



Evalúa



Valor Numérico



Conserva entrada



Factoriza



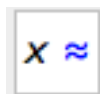
Desarrolla



Sustituye



Resuelve



Resolución numérica



Derivada



Integral



Cálculo de probabilidades



Inspección de funciones



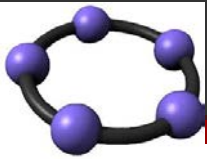
Elimina

Un menú muy simple con muchas posibilidades.

Algunos cálculos que permite GeoGebra CAS



- Operaciones con números naturales, enteros, racionales, irracionales, complejos.
- Factorizar, MCD y mcm de números y polinomios.
- Progresiones, combinatoria.
- Resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas.
- Geometría analítica.
- Cálculo de límites, derivadas e integrales.
- Operaciones con vectores y matrices.
- Probabilidad y estadística.
- ... y mucho más.



Nociones previas

- La Información se organiza en filas.
- Cada fila formada por línea de entrada y línea de salida.

The screenshot shows the CAS-Cálculo Simbólico window. Row 1 shows the input $2+3$ and the output $\rightarrow 5$. Row 2 shows the input $(a+b)(a-b)$ and the output $\rightarrow a^2 - b^2$. Red arrows point from the text labels to the corresponding parts of the interface.

Línea de Entrada

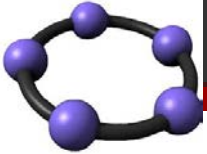
Línea de Salida

| Teclas de escritura rápida. Atajos de edición En una línea en blanco | |
|---|---------------------------|
| = | Copia Entrada anterior |
| Barra espaciadora | Copia Salida anterior |
|) | Copia salida anterior () |

**Muestra representación
en vista gráfica.**

The screenshot shows the software interface with three tabs: Vista Algebraica, Cálculo Simbólico (CAS), and Vista Gráfica. In the Vista Algebraica tab, the function $f(x) = x^2 + 3$ is shown. In the Cálculo Simbólico (CAS) tab, the function is shown as $f(x) := x^2 + 3$. In the Vista Gráfica tab, a graph of the parabola $f(x) = x^2 + 3$ is displayed. A red circle highlights the function icon in the CAS tab, with an arrow pointing to the text 'Muestra representación en vista gráfica.'

Primeras operaciones



AS-Cálculo Simbólico

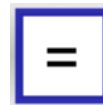
$$2+3-4+5$$

$$2.1-3.2/4.6$$

$$\rightarrow \frac{323}{230}$$

$$1+1/(1+1/(1+1/(1)))$$

$$\checkmark 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+i}}$$



Evalúa. Valor exacto.



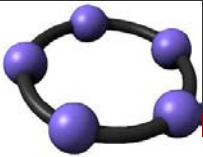
Valor Numérico. Cálculo aprox.

| | Operaciones |
|-------------------|-------------|
| Suma | + |
| Resta | - |
| Producto | * espacio |
| División | / |
| Elevado a | ^ |
| Separador decimal | . |

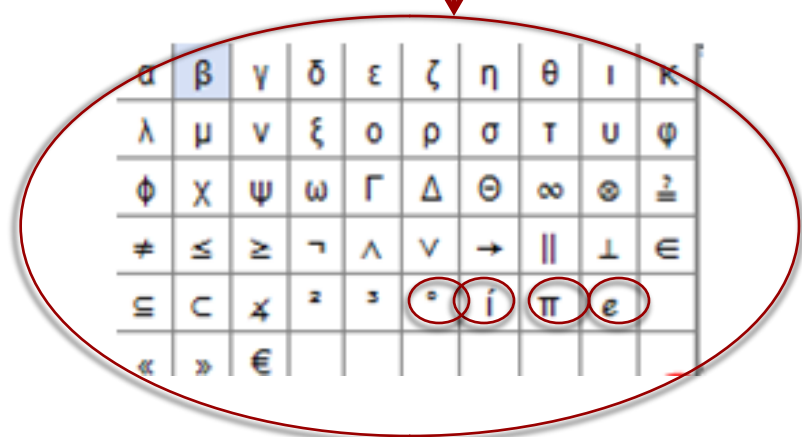
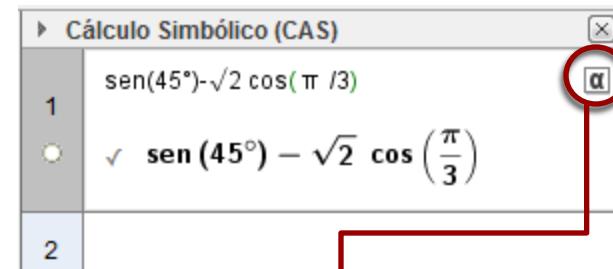


Se comprueba que se ha introducido bien la expresión.

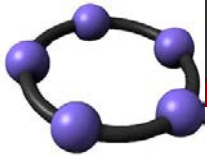
Números y símbolos frecuentes



| | | Windows | Mac |
|-------------------|----------|---------|----------|
| Raíz cuad. | sqrt() | Alt + r | Ctrl + r |
| π | pi | Alt + P | Ctrl + P |
| e | | Alt + e | Ctrl + e |
| i | sqrt(-1) | Alt + i | Ctrl + i |
| Infinito ∞ | | Alt + u | Ctrl + u |
| ° sexagesimal | | Alt + o | Ctrl + o |



Referencias entre filas



| Referencias Estáticas # | | Referencias Dinámicas \$ |
|-------------------------|----------------------|--------------------------|
| # | Salida Previa | \$ |
| #n | Salida fila n | \$n |
| ## | Entrada Previa | \$\$ |
| ##n | Entrada fila n | \$\$n |
| Clic (botón Izq.) | Salida fila n | Alt + Clic Izq. |

Referencia Estática

| Cálculo Simbólico (CAS) | |
|-------------------------|----------|
| 1 | 3+4(2+5) |
| ○ | → 31 |
| 2 | # |

| Cálculo Simbólico (CAS) | |
|-------------------------|----------|
| 1 | 3+4(2+6) |
| ○ | → 35 |
| 2 | 31 |
| ○ | → 31 |

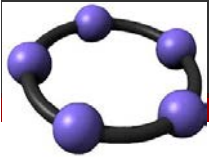
Clic fila n

Referencia Dinámica \$

| Cálculo Simbólico (CAS) | |
|-------------------------|----------|
| 1 | 3+4(2+5) |
| ○ | → 31 |
| 2 | \$1 |

| Cálculo Simbólico (CAS) | |
|-------------------------|----------|
| 1 | 3+4(2+6) |
| ○ | → 35 |
| 2 | \$1 |
| ○ | → 35 |

Alt + Clic fila n



MCD, MCM, primos,...

Factoriza

| Command | Result |
|-----------|------------------------|
| 1 | 8512 |
| Factoriza | $2^6 \cdot 7 \cdot 19$ |
| 2 | Factoriza[8512] |
| → | $2^6 \cdot 7 \cdot 19$ |
| 3 | Factoriza[324] |
| → | $2^2 \cdot 3^4$ |
| 4 | a:=8512 |
| → | a := 8512 |
| 5 | b:=324 |
| → | b := 324 |
| 6 | MCD[a,b] |
| → | 4 |

15
3 · 5

Factoriza[n] (n)

MCD[m ,n] MCD[{a,b,c,...}]

MCM[m, n] MCM[{a,b,c,...}]

Es Primo[n] (n) → true, false

PrimoAnterior[] PrimoSiguiente[]

Divisores[n] ListaDivisores[]

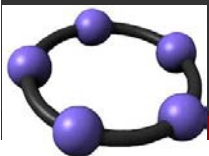
Suma Divisores[n]

División[D , d] → cociente, resto

Cociente[D ,d] → cociente

Resto[D , d] → resto

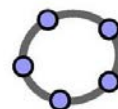
Factoriza, MCD, MCM, Cociente,.... Válidos también para expresiones (polinomios)

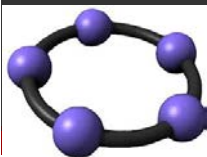


Ejercicios números primos,...

- Determina los números primos entre 1 y 100.
- ¿Qué números entre 1 y 100 tienen un número impar de divisores? ¿Y exactamente tres divisores?
- Calcula los diez primeros primos de la forma $2^n - 1$. Primos de Mersenne.
- ¿Cuál es el número con más divisores entre 1 y 100?
- Determina los números perfectos entre 1 y 100.
(Un número es perfecto si es igual a la suma de sus divisores excluido el propio número).

Estos ejercicios se simplifican utilizando un deslizador en la vista gráfica.





Potencias, radicales y logaritmos

15
3 · 5

()

7_□

x =

x ≈

∂

×

▶ Cálculo Simbólico (CAS)

1 $\sqrt{245}$

○ Desarrolla: $7\sqrt{5}$

2 $\text{raizn}(224,5)$

○ $\rightarrow 2\sqrt[5]{7}$

3 $\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{2}))})}$

○ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

4 $\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{2}))})}$

○ Desarrolla: $\sqrt{2\sqrt[4]{8}}$

15
3 · 5

()

7_□

x =

x ≈

∂

×

▶ Cálculo Simbólico (CAS)

1 $\log(2, 1024)$

○ $\rightarrow \frac{\ln(1024)}{\ln(2)}$

2 $\log_2(1024)$

○ ≈ 10

3 $\log(2, \sqrt{8})$

○ $\rightarrow \frac{\ln(2\sqrt{2})}{\ln(2)}$

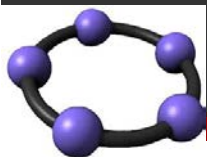
4 $\log(2, \sqrt{8})$

○ ≈ 1.5

| Potencias, raíces | |
|-------------------|----------------|
| Elevado a | \wedge |
| Raíz Cuadrada | Sqrt() Alt + r |
| Raíz Cúbica | Cbrt() |
| Raíz índice n | raizn(a) |

| logaritmos | |
|---------------------|--------------|
| Logaritmo neperiano | Log() ln() |
| Logaritmo decimal | Log10() |
| Logaritmo base 2 | Log2() |
| Logaritmo en base b | Log[b,a] |

Por supuesto, ecuaciones con radicales, exponenciales y logarítmicas.



Polinomios

► Cálculo Simbólico (CAS)

1 $P(x) := x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$

○ $\rightarrow P(x) := x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$

2 $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$

○ Factoriza: $(x - 1)(x + 3)(x^2 + 1)$

3 P

○ Factoriza: $(x - 1)(x + 3)(x^2 + 1)$

Factores[P]

4
○ $\rightarrow \begin{pmatrix} x - 1 & 1 \\ x + 3 & 1 \\ x^2 + 1 & 1 \end{pmatrix}$

5 Raíz[P]

○ $\rightarrow \{x = -3, x = 1\}$

6 RaízCompleja[P]

○ $\rightarrow \{1, -3, -i, i\}$



Factoriza



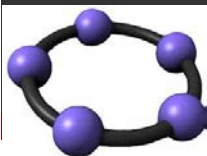
Desarrolla



Sustituye

Polinomios

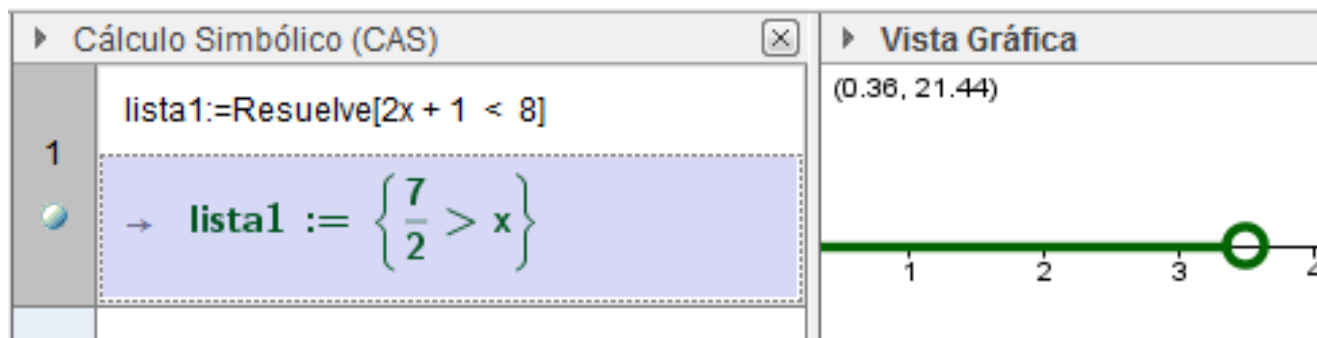
| $P(x) :=$ | $Q(x) :=$ | Raíces o factores complejos |
|---------------------|-----------|--|
| Factoriza[P(x)] | | FactorC[P(x)] |
| Factores[P(x)] | | RaízCompleja[P(x)] |
| Raíz[P(x)] | | |
| MCD [P(x),Q(x)] | | MCD[{p(x),Q(x),...}] |
| MCD [P(x),Q(x)] | | MCM[{p(x),Q(x),...}] |
| División[P(x),Q(x)] | | $\rightarrow \{\text{cociente, resto}\}$ |
| Cociente[P(x),Q(x)] | | $\rightarrow \text{cociente}$ |
| Resto[P(x),Q(x)] | | $\rightarrow \text{resto}$ |



Ecuaciones e inecuaciones

| Cálculo Simbólico (CAS) | |
|-------------------------|--|
| 1 | $4(x-2)(x-1)+3(x^2-1)=9$ |
| <input type="radio"/> | Resuelve: $\left\{x = -\frac{2}{7}, x = 2\right\}$ |
| 2 | $\text{sqrt}(x+1)+\sqrt{7x-4}=-3$ |
| <input type="radio"/> | $\sqrt{x+1} + \sqrt{7x-4} = -3$ |
| 3 | Resuelve[$t^2-5t+6=0$] |
| <input type="radio"/> | $\rightarrow \{t = 2, t = 3\}$ |

| Ecuaciones, inecuaciones, sistemas | | |
|--|--|---|
| Resuelve[ecuación] Soluciones[ecuación] Raíz[ecuación] | | Solución exacta, si la hay, de una ecuación |
| SolucionesN ResoluciónN | | Soluciones numéricas o aproximadas |
| SolucionesC ResoluciónC | | Soluciones complejas |
| Resuelve[ecuación, variable] ResoluciónN[ecuación, variable, punto Inicial] | | Si hay más de una variable |



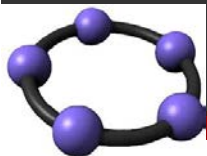
Para resolver sistemas también matrices.

Ecuaciones paso a paso

| ► Cálculo Simbólico (CAS) | |
|---------------------------|--------------------------|
| 1 | $2x+1=7$ |
| <input type="radio"/> | $\rightarrow 2x + 1 = 7$ |
| 2 | $(2x + 1 = 7) - 1$ |
| <input type="radio"/> | $\rightarrow 2x = 6$ |
| 3 | $(2x = 6) / 2$ |
| <input type="radio"/> | $\rightarrow x = 3$ |

➤ De forma sencilla, podemos mostrar los pasos en la resolución de una ecuación.

➤ Podemos utilizar este procedimiento en otras situaciones.



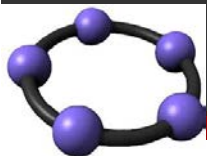
Sistemas de ecuaciones

➤ Los mismos comandos que para resolver ecuaciones.

| ► Cálculo Simbólico (CAS) | |
|---------------------------|---|
| 1 | $\{4x-3y=23, 2x+5y=-21\}$ |
| <input type="radio"/> | Resuelve: $\{\{x = 2, y = -5\}\}$ |
| 2 | $\{x y = 12, x^2 + y^2 = 25\}$ |
| <input type="radio"/> | Resuelve: $\{\{x = 3, y = 4\}, \{x =$ |
| 3 | $\{2 \log_{10}(x) + \log_{10}(y) = 2, \log_{10}(x y) = 1\}$ |
| <input type="radio"/> | ResoluciónN: $\{x = 10, y = 1\}$ |

| Sistemas de Ecuaciones |
|--|
| $\{\text{ecuación}_1, \text{ecuación}_2, \dots\}$ |
| $\text{Soluciones}[\{ec_1, ec_2, \dots\}, \{x, y, z, \dots\}]$ |
| $\text{Resuelve}[\{ec_1, ec_2, \dots\}, \{x, y, z, \dots\}]$ |

Para resolver sistemas lineales es muy cómodo utilizar matrices.



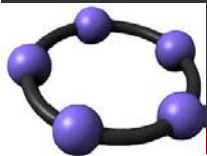
Números complejos

| Cálculo Simbólico (CAS) | |
|-------------------------|---|
| 1 | Sqrt(-1) |
| ○ | → i |
| 2 | $z := 2 + 3i$ |
| ○ | → $z := 2 + 3i$ |
| 3 | abs(z) |
| ○ | → $\sqrt{13}$ |
| 4 | arg(z) |
| ○ | → $\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$ |
| 5 | APolar[z] |
| ○ | → $\left(\sqrt{13}; \arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ |

| Números complejos | |
|-----------------------|--|
| Unidad imaginaria i | $\text{Sqrt}(-1)$, alt $+i$ |
| $z := a + bi$ | |
| Modulo de z | $\text{abs}(z)$ |
| Argumento de z | $\text{arg}(z)$ |
| Conjugado de z | $\text{Conjugate}(z)$ |
| Parte real | $\text{Real}(z)$ |
| Parte imaginaria | $\text{Imaginaria}(z)$ |
| Binómica → polar | $\text{Apolar}(z)$ |
| Polar → binómica | $\text{Acomplejo}(\text{mód}, \text{arg})$ |

| Ecuaciones, polinomios,... | |
|----------------------------|---------------------------------------|
| reales | complejos |
| Soluciones[ecuación] | $\text{SolucionesC}[\text{ecuación}]$ |
| Factoriza[expresión] | $\text{FactorC}[\text{expresión}]$ |

Utilizando la vista grafica se representan los complejos en el plano.



Sucesiones, progresiones, combinatoria

Calculator interface showing symbolic calculations:

- 1. $b(n) := n^2 + 2n + 1$
→ $b(n) := n^2 + 2n + 1$
- 2. $b(26)$
→ **729**
- 3. $\text{Suma}[b(n), n, 1, 26]$
→ **6929**
- 4. $\text{Suma}[k, k, 1, n]$
Factoriza: $n \frac{n+1}{2}$

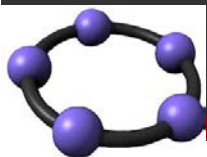
➔ Calcular el valor de la suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Calculator interface showing the sum calculation and a graphical slider:

- 1. $\text{Suma}[(1/a)^n, n, 1, \infty]$
✓ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n$
- Vista Gráfica: $a = 3$

Suma[expresión, variable, valor inicial, valor final]



Trigonometría

► Cálculo Simbólico (CAS)

1 $5 \cos(\pi/4) + 2 \sin(\pi/3) - \sec(30^\circ)$

○ $\rightarrow \frac{1}{6} (2\sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot 15)$

2 $\sin(A/2)$

$\rightarrow \sin\left(\frac{1}{2} A\right)$

3 $\text{TrigDesarrolla}[\sin(a+b)]$

$\rightarrow \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$

4 $\text{TrigDesarrolla}[\sin(2A)]$

$\rightarrow 2 \cos(A) \sin(A)$

5 $\sin(2x)=1/2$

○ Resuelve: $\left\{ x = k_1 \pi + \frac{1}{12} \pi, x = k_1 \pi + \frac{5}{12} \pi \right\}$

Trigonometría

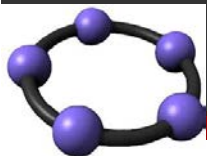
| | | |
|----------------------|-----------------|------------------------|
| Sin(), sen(); | Cos(); | Tan(); |
| Sec(); | Cosec(); | Cotan() cotg(x) |

| | | |
|-----------------|-------------------|------------------------|
| Asin() ; | acos() ... | Arcoseno(), ... |
|-----------------|-------------------|------------------------|

| | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| Sinh(), sen(h) ; cos(h) | Seno hiperbólico(), ... |
|--------------------------------|--------------------------------|

| | |
|--------------------|-----------------------------|
| Alt + o , ° | Grados sexagesimales |
|--------------------|-----------------------------|

| |
|---|
| TrigDesarrolla [sen(a+b)]=sen(a) cos(b) +cos(a) sen(b) |
|---|

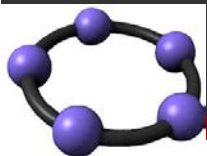


Ejercicios

- Comprobar que $x=2+3i$ es raíz del polinomio
 $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 10x - 6$
- Si m y n son dos números naturales consecutivos, entonces la siguiente expresión es un cuadrado perfecto.

$$m^2 + n^2 + (mn)^2$$

| | |
|----|---|
| 1 | $\rightarrow P(x) := 2x^3 - 7x^2 + 10x - 6$ |
| 2 | $P(1+i)$ |
| 3 | $\rightarrow 0$ |
| 4 | $2x^3 - 7x^2 + 10x - 6$ |
| 5 | Sustituye, $x=1+i$: 0 |
| 6 | $m^2 + n^2 + (mn)^2$ |
| 7 | $\rightarrow m^2 n^2 + m^2 + n^2$ |
| 8 | $m^2 n^2 + m^2 + n^2$ |
| 9 | Sustituye, $m=n+1$: $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1$ |
| 10 | $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1$ |
| 11 | Factoriza: $(n^2 + n + 1)^2$ |



Vectores

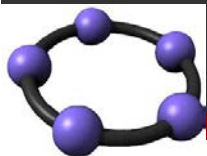
| Cálculo Simbólico (CAS) | |
|-------------------------|------------------------------|
| 1 | $u := \text{Vector}[(1,4)]$ |
| → | $u := (1,4)$ |
| 2 | $v := \text{Vector}[(3,-1)]$ |
| → | $v := (3,-1)$ |
| 3 | $2u - 3v$ |
| → | $(-7, 11)$ |
| 4 | $u \cdot v$ |
| → | -1 |
| 5 | $\text{abs}(u)$ |
| → | $\sqrt{17}$ |
| 6 | $\text{Ángulo}[u,v]$ |
| → | 265.6° |

| Vectores | |
|--------------------|-----------------------|
| $u := [(a,b)]$ | $u := [(a,b), (c,d)]$ |
| Módulo | $\text{abs}(u)$ |
| Producto escalar | $u * v ; u \cdot v$ |
| Producto vectorial | $u \otimes v$ |
| Ángulo | $\text{ángulo}[u,v]$ |

Ejercicio vectores.

- **Dados los vectores $u=(1,4)$ y $v=(2,k)$, determina k para que:**
- **a) u y v sean perpendiculares.**
 - **b) Módulo de $v = 5$**
 - **c) Calcular un vector unitario en la dirección de u y sentido contrario.**

| Cálculo Simbólico (CAS) | |
|-------------------------|---|
| 1 | $u := \text{Vector}[(1,4)]$ → $u := (1,4)$ |
| 2 | $v := \text{Vector}[(2,k)]$ → $v := (2,k)$ |
| 3 | $u \cdot v = 0$ Resuelve: $\left\{ k = -\frac{1}{2} \right\}$ |
| 4 | $\text{abs}(v)=5$ Resuelve: $\left\{ k = -\sqrt{21}, k = \sqrt{21} \right\}$ |
| 5 | $-u/\text{abs}(u)$ → $\left(-\frac{\sqrt{17}}{17}, -4 \cdot \frac{\sqrt{17}}{17} \right)$ |



Matrices

| Cálculo Simbólico (CAS) | |
|-------------------------|---|
| 1 | $A := \{\{1,2,3\}, \{4,-1,5\}, \{6,-3,0\}\}$ |
| ○ | $\rightarrow A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 2 | $B := \{\{3,2,1\}, \{4,5,6\}, \{3,4,-2\}\}$ |
| ○ | $\rightarrow B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ |
| 3 | AB |
| ○ | $\rightarrow \begin{pmatrix} 20 & 24 & 7 \\ 23 & 23 & -12 \\ 6 & -3 & -12 \end{pmatrix}$ |
| 4 | A^3 |
| ○ | $\rightarrow \begin{pmatrix} 69 & 24 & 36 \\ 48 & 45 & 60 \\ 72 & -36 & 57 \end{pmatrix}$ |

| Matrices | | |
|--|---|-------|
| $A := \{\{1,2,3\}, \{4,5,-2\}, \{4,-1,5\}\}$ | | |
| $A+B$ | $A*B = A B$ | A^n |
| $\text{Identidad}[n]$ | \rightarrow Matriz identidad de orden n | |
| $\text{Traspone}[A]$ | | |
| $\text{Determinante}[A]$ | | |
| $\text{RangoMatriz}[A]$ | | |
| $\text{Inversa}[A], A^{(-1)}$ | | |
| $\text{EscalonadaReducida}[A]$ | | |

- Hoja de cálculo
- Resolución de sistemas lineales

Sistemas lineales mediante matrices

Resuelve[$\{2x+y-z=11, x-3y=-20, 4x+2y+5z=8\}$]
→ $\{x = 1, y = 7, z = -2\}$

A
→ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

B
→ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & -3 & 0 & -20 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

EscalonadaReducida[B]
→ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

RangoMatriz[C]
→ 2

RangoMatriz[D]
→ 2

Sistema compatible indeterminado

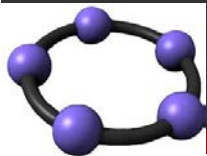
| | A | B | C | D |
|----|---|----|----|-----|
| 1 | 2 | 1 | -1 | 11 |
| 2 | 1 | -3 | 0 | -20 |
| 3 | 4 | 2 | 5 | 8 |
| 4 | | | | |
| 5 | 1 | -9 | 5 | 33 |
| 6 | 1 | 3 | -1 | -9 |
| 7 | 1 | -1 | 1 | 5 |
| 8 | | | | |
| 9 | | | | |
| 10 | | | | |
| 11 | | | | |
| 12 | | | | |
| 13 | | | | |
| 14 | | | | |
| 15 | | | | |
| 16 | | | | |
| 17 | | | | |
| 18 | | | | |
| 19 | | | | |
| 20 | | | | |
| 21 | | | | |
| 22 | | | | |
| 23 | | | | |

➔ Pueden escribirse las matrices utilizando la Hoja de Cálculo.

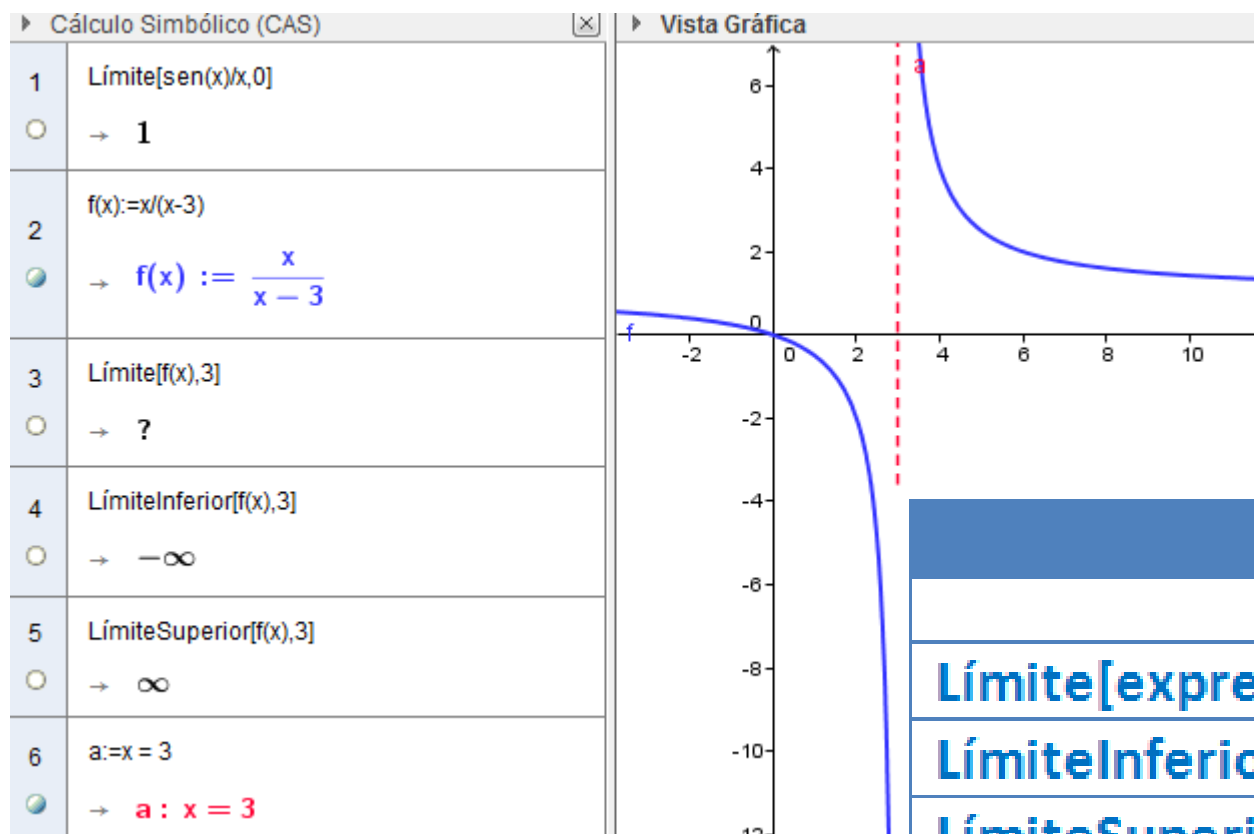
➔ Seleccionar las celdas que forman los elementos de la matriz.

➔ Utiliza herramienta crear matriz de la barra herramientas de hoja de calculo.

El comando EscalonadaReducida[A] resuelve por Gauss el sistema.



Límites

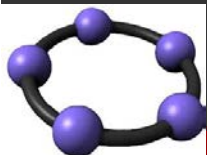


Límites

Límite[expresión, punto]

LímiteInferior[expresión,punto]

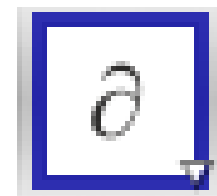
LímiteSuperior[expresión,punto]



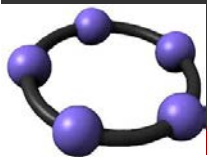
Derivadas

▶ Cálculo Simbólico (CAS)

| | |
|-----------------------|---|
| 1 | $x^2 \ln(x+1)$ |
| <input type="radio"/> | Derivada: $2x \ln(x+1) + \frac{x^2}{x+1}$ |
| 2 | Derivada[$e^{-x^2/2}$] |
| <input type="radio"/> | → $-x e^{-\frac{1}{2}x^2}$ |
| 3 | $f(x) := \sin(x)^2$ |
| <input type="radio"/> | ✓ $f(x) := \sin^2(x)$ |
| 4 | $f(x)$ |
| <input type="radio"/> | → $2 \cos(x) \sin(x)$ |
| 5 | $f'(x)$ |
| <input type="radio"/> | → $2 \cos^2(x) - 2 \sin^2(x)$ |



| Derivadas | | |
|--|---------|----------|
| $f(x) :=$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ |
| Derivada[expresión] | | |
| Derivada[expresión,variable] | | |
| Derivada[expresión,variable,orden] | | |
| DerivadaImplicita[f(x,y)] | | |
| DerivadaImplicita[f(x,y), v dep., v indep.] | | |
| PolinomioTaylor[función, variable, punto, orden] | | |

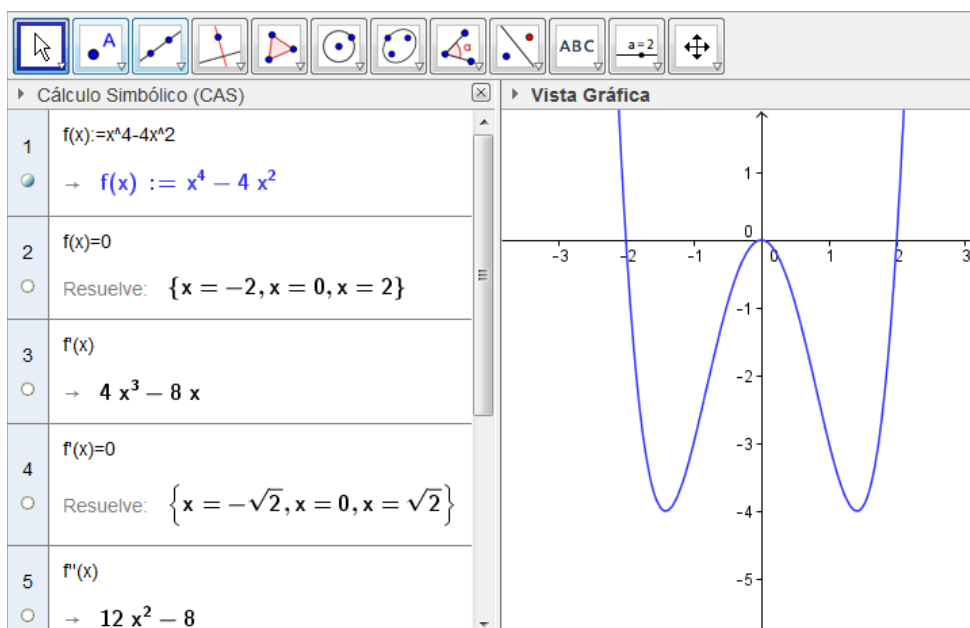


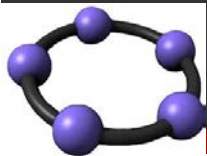
Extremos, puntos de inflexión,...

➤ Dada la $f(x) = x^4 - 2x^2$. Determina:

➤ Puntos de corte con ejes.

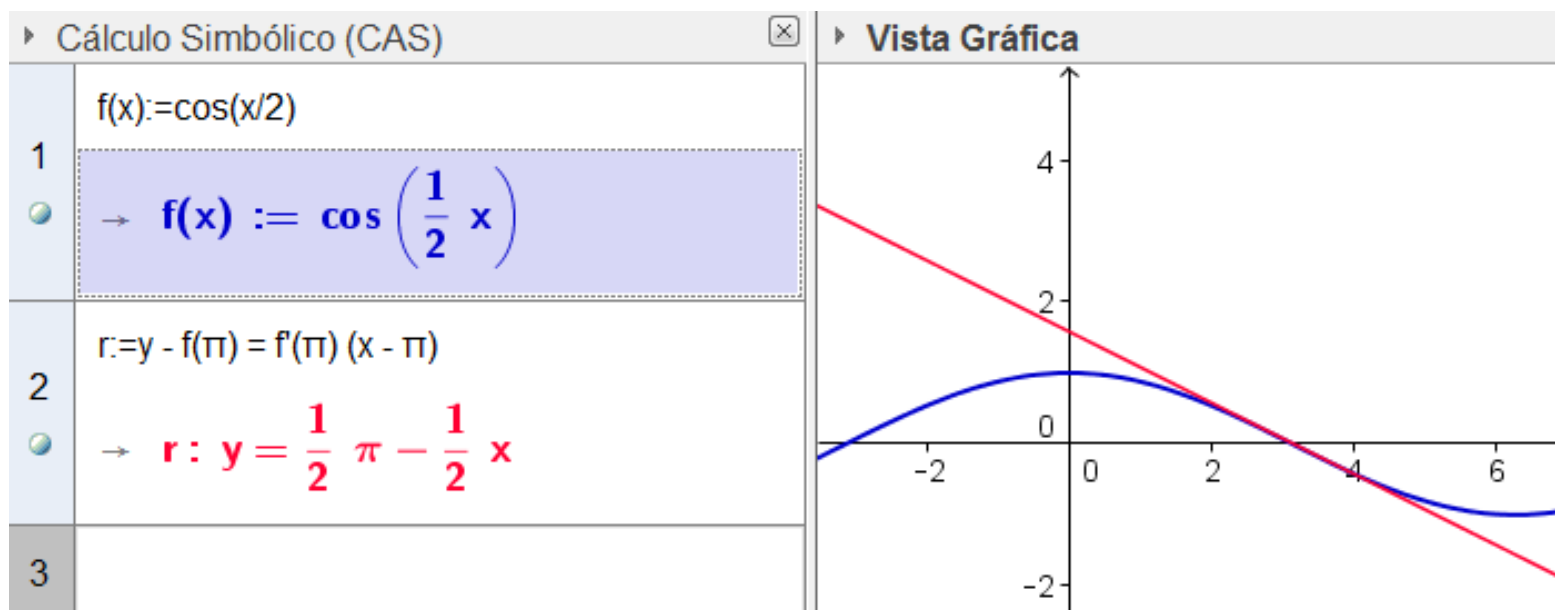
➤ Extremos y puntos de inflexión.

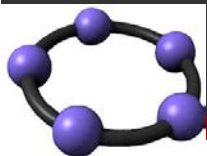




Recta tangente

➔ Determinar la recta tangente a $y = \cos(x/2)$ en $x = \pi$.





Polinomio de Taylor

Cálculo Simbólico (CAS)

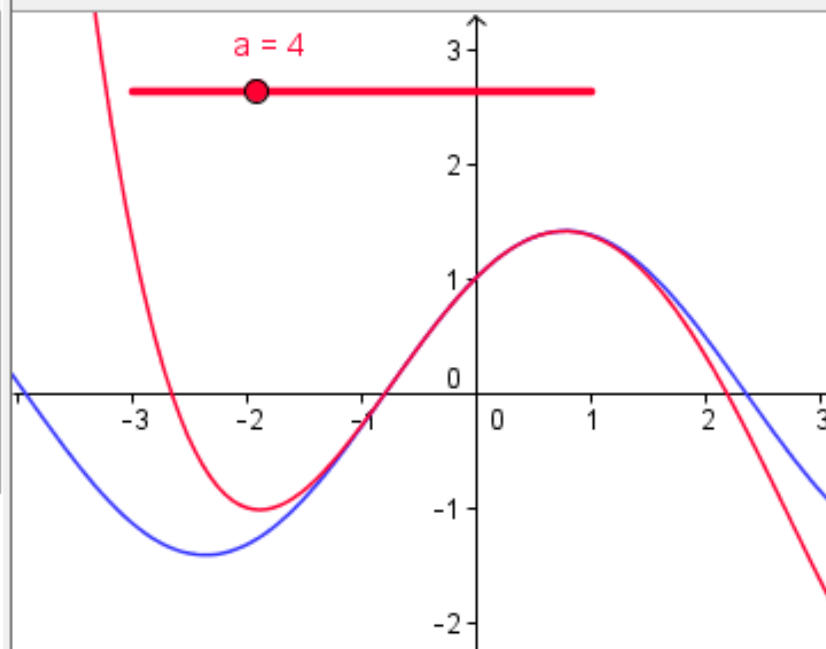
$f(x) := \text{sen}(x) + \cos(x)$

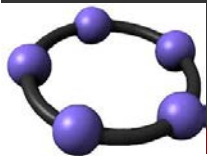
→ $f(x) := \cos(x) + \text{sen}(x)$

$g(x) := \text{PolinomioTaylor}[f(x), 0, a]$

→ $g(x) := \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + x + 1$

► Vista Gráfica





Integrales

Cálculo Simbólico (CAS)

| | |
|---|---|
| 1 | $x^2 - 3x + 2$ Integral: $\frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 2 x + c_1$ |
| 2 | Integral[1/(2x+3)] $\rightarrow \frac{1}{2} \ln(2 x + 3) + c_4$ |
| 3 | Integral[e^x , 0, 1] $\rightarrow e - 1$ |
| 4 | $x^2 - 4x = 2x - 5$ Resuelve: $\{x = 1, x = 5\}$ |
| 5 | IntegralEntre[$x^2 - 4x$, $2x - 5$, 1, 5] $\rightarrow -\frac{32}{3}$ |



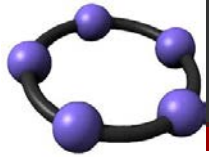
Cálculo Integral

Integral[f(x)]

Integral[f(x), a, b]

IntegralEntre[f(x), g(x), a, b]

FraccionesParciales[expresión]



Ufff ... por fin se acabó.

➤ Muchas Gracias.



josemarranz@gmail.com